专题1-2 高一函数专题复习（2）

**答案和解析**

**【答案】**

1. $\{x|1\leq x\leq 3\}$

2. $\{x|x>3$或$x<-1$且$x\ne 4\}$

3. $(-\infty ，-7]∪(-2，+\infty )$．

4. $f(x)=4x-3$或$f(x)=-4x+5$

5. $[7，+\infty )$

6. 1

7. $-\frac{1}{5}$

8. 1

9. $(\frac{1}{2}，+\infty )$

10. $\{a|a>1$或$a=-3\}$．

11. 解：$(1)$设$t=\sqrt{1-2x}$，则$t\geq 0，x=\frac{1-t^{2}}{2}$，
代入$f(x)$得，$y=\frac{1-t^{2}}{2}+t=-\frac{1}{2}(t-1)^{2}+1$，
因为$t\geq 0$，所以函数*y*的最大值是1，
即函数$f(x)$的值域是$[1，+\infty )$；
$(2)$由题意得，$f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x-2，①$
令*x*取$\frac{1}{x}$代入得，$f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{3}{x}-2，②$
由$①②$解得$f(x)=\frac{2}{x}-x-\frac{2}{3}$．

12. 解：$(1)$当$a=1$时，函数$f(x)=\frac{x}{x+2}-x^{2}$，
令$\frac{x}{x+2}-x^{2}=0$，可得可得$x=0$，或$x^{2}+2x-1=0$，
解得$x=0$，或$x=-1-\sqrt{2}$，或$x=-1+\sqrt{2}$．
综上可得，当$a=1$时，函数$f(x)$的零点为$x=0$，或$x=-1-\sqrt{2}$，或$x=-1+\sqrt{2}$
$(2)$证明：$∵$当$a>0$时，$x>0$，由函数$f(x)=0$得：$ax^{2}+2ax-1=0$，
记$g(x)=ax^{2}+2ax-1$，
则$g(x)$的图象是开口朝上的抛物线，
由$g(0)=-1<0$得：
函数$g(x)$在$(0，+\infty )$内有且仅有一个零点．
$∴$函数$f(x)$在$(0，+\infty )$上有唯一零点

13. 解：$(1)∵f(x)=2^{x}$，
$∴f(log\_{4}x)=3⇔2^{log\_{4}x}=2^{log\_{2}\sqrt{x}}=\sqrt{x}=3$，解得：$x=9$，
即方程$f(log\_{4}x)=3$的解为：$x=9$；
$(2)∵f(x)=2^{x}$，为*R*上的增函数，
$∴$由$f(x+1)\leq f[(2x+a)^{2}](a>0)$对$x\in [0，15]$恒成立，
得$x+1\leq (2x+a)^{2}(a>0)$对$x\in [0，15]$恒成立，
因为$a>0$，且$x\in [0，15]$，所以问题即为$\sqrt{x+1}\leq 2x+a$恒成立
$∴a\geq (-2x+\sqrt{x+1})\_{max}，x\in [0，15]$．
设$m(x)=-2x+\sqrt{x+1}$，令$\sqrt{x+1}=t(1\leq t\leq 4)$，则$x=t^{2}-1，t\in [1，4]$，
$∴m(t)=-2(t^{2}-1)+t=-2(t-\frac{1}{4})^{2}+\frac{17}{8}$，
所以，当$t=1$时，$m(x)\_{max}=1$，
$∴a\geq 1$．
$(3)$令$2^{x}=t，∵x\in (-\infty ，0]$，
$∴t\in (0，1)$，
$∴$存在$x\in (-\infty ，0]$，使$|af(x)-f(2x)|>1$成立$⊕$存在$t\in (0，1)$使得$|t^{2}-at|>1$，
所以存在$t\in (0，1)$使得$t^{2}-at>1$或$t^{2}-at<-1$，
即存在$t\in (0，1)$使得$a<(t-\frac{1}{t})\_{max}$或$a>(t+\frac{1}{t})\_{min}$，
$∴a\leq 0$或$a\geq 2$；

14. 解：$(1)$函数$f(x)=x^{2}-2ax+2=(x-a)^{2}+2-a^{2}$，其对称轴方程为$x=a$，
当$a\leq \frac{1}{3}$时，$f(x)$在$[\frac{1}{3}，3]$上单调递增，其最小值为$g(a)=f(\frac{1}{3})=\frac{19}{9}-\frac{2a}{3}$；
当$\frac{1}{3}\leq a\leq 2$时，$f(x)$在$[\frac{1}{3}，3]$上的最小值为$g(a)=f(a)=2-a^{2}$；
函数$f(x)=x^{2}-2ax+2$在$[\frac{1}{3}，3]$上的最小值$g(a)=\left\{\begin{matrix}\frac{19}{9}-\frac{2a}{3}，a\leq \frac{1}{3}\\2-a^{2}，\frac{1}{3}<a\leq 2\end{matrix}\right.$
$(2)(i)∵y=\sqrt{x^{2}-1}+t$在$[1，+\infty )$递增，
由闭函数的定义知，该函数在定义域$[1，+\infty )$内，
存在区间$[p，q](p<q)$，使得该函数在区间$[p，q]$上的值域为$[p^{2}，q^{2}]$，所以$p\geq 1， \_{ }^{ }\left\{\begin{matrix}\sqrt{p^{2}-1}+t=p^{2}\\\sqrt{q^{2}-1}+t=q^{2}\end{matrix}\right.$，
$∴p^{2}，q^{2}$为方程$\sqrt{x^{2}-1}+t=x$的二实根，
即方程$x^{2}-(2t+1)x+t^{2}+1=0$在$[1，+\infty )$上存在两个不等的实根且$x\geq t$恒成立，
令$u(x)=x^{2}-(2t+1)x+t^{2}+1$，
$∴\left\{\begin{matrix}△>0\\\frac{2t+1}{2}>1\\u(1)\geq 0\\t\leq 1\end{matrix}\right.，∴\left\{\begin{matrix}t>\frac{3}{4}\\t>\frac{1}{2}\\(t-1)^{2}\geq 0\\t\leq 1\end{matrix}\right.$，
解得$\frac{3}{4}<t\leq 1$
$∴$实数*t*的取值范围$(\frac{3}{4}，1]$．
$(ii)$对于$(1)$，易知$g(a)$在$(-\infty ，2]$上为减函数，
$①$若$p<q\leq \frac{1}{3}，g(a)$递减，若$g(a)$为“闭函数”，
则$\left\{\begin{matrix}\frac{19}{9}-\frac{2p}{3}=q^{2}\\\frac{19}{9}-\frac{2q}{3}=p^{2}\end{matrix}\right.$，
两式相减得$p+q=\frac{2}{3}$，这与$p<q\leq \frac{1}{3}$矛盾．
$②\frac{1}{3}<p<q\leq 2$时，若$g(a)$为“闭函数”，则$\left\{\begin{matrix}2-p^{2}=q^{2}\\2-q^{2}=p^{2}\end{matrix}\right.$
此时$p^{2}+q^{2}=2$满足条件的$p，q$存在，
$∴\frac{1}{3}<p<q\leq 2$时，使得$g(a)$为“闭函数”$p，q$存在，
$③p\leq \frac{1}{3}<q\leq 2$时，若$g(a)$为“闭函数”，则$\left\{\begin{matrix}\frac{19}{9}-\frac{2p}{3}=q^{2}\\2-q^{2}=p^{2}\end{matrix}\right.$，
消去*q*得$9p^{2}-6p+1=0$，即$(3p-1)^{2}=0$
解得$p=\frac{1}{3}$此时，$q=\frac{\sqrt{17}}{3}<2$，且$p^{2}+q^{2}=2$
$∴p=\frac{1}{3}<q\leq 2$时，使得$g(a)$为“闭函数”$p，q$存在，
综上所述，当$p，q$满足$\left\{\begin{matrix}\frac{1}{3}\leq p<q\leq 2\\p^{2}+q^{2}=2\end{matrix}\right.$时，$g(a)$为“闭函数”